Fouad Badran, Cécile Mallet, Carlos, Mejia,
Charles Sorror, Sylvie Thiria

TPA01 : Initiation à Matlab/Octave

I - Objectif

Le but de ce TP est de se familiariser à l'utilisation de Matlab. Cela se fera par la définition et la manipulation de matrices, la représentation de graphes de fonctions, la résolution d'un système d'équation linéaire et le calcul d'expressions polynômiales.

II - Eléments pour la réalisation du TP

Pour ceux qui ne connaitrait pas Matlab et qui n'aurait pas de livre sur Matlab, nous mettons à votre disposition le pdf MemoInitMatlab intitulé « mémo d'initiation à Octave/Matlab » qui devrait vous aider à faire vos premiers pas avec Matlab.
Les fonctions (Matlab) à utiliser pour ce TP seront à chaque fois indiquées, en apportant, si on le juge utile des précisions supplémentaires sur leurs utilisations.

III - Initiation à Matlab

Remarques préalables :

Sans précision contraire, on considère qu'un vecteur x est un vecteur colonne, sachant que, avec Matlab, la création d'un vecteur colonne se fait en utilisant la quote.

Ainsi, x = [1 : 10]' est un vecteur colonne.

On précise aussi qu'un vecteur est aussi une matrice (dont l'une des dimensions est réduite 1)

1) Définitions et manipulations de matrices

1ère série d'exercice :

a) Définition d'une matrice ligne A, contenant les nombres de 0 à 9.

b) Définir une matrice B qui contient les mêmes données que A mais qui est une matrice colonne. (Se servir de la matrice A)

c) Définir une matrice colonne C qui contient tous les nombres impairs à 1 chiffre et une matrice colonne D qui contient tous les nombres pairs à un chiffre (zéro inclus). On définira ces matrices de deux façons : soit en créant la matrice directement, soit en se servant de la matrice A.

d) Définir une matrice E de dimension 5×2 contenant dans la première colonne les chiffres impairs et dans la deuxième colonne les chiffres pairs. Vous vous servirez pour cela des matrices C et D.

e) En vous servant de la matrice E, définir une matrice colonne F de 10 éléments contenant les chiffres impairs puis les chiffres pairs.

2ème série d'exercice :

f) Définir une matrice X, colonne, qui contient les nombres de 1 à 10.

g) A partir de X, former une matrice Y qui contient la racine carré des nombres de 1 à 10.

h) A partir de X, former une matrice Z qui contient le carré des nombres de 1 à 10.

i) Former une matrice A qui contient la somme de Y et Z.

j) Calculer la moyenne de A.

k) Définir une matrice Y qui contient 10 nombres entiers tirés aléatoirement entre 1 et 50. (fonctions à utiliser **rand**, et **floor** par exemple)

-l) Former le vecteur Y1 avec les éléments impairs de Y et Y2 avec les pairs. (fonctions à utiliser **find**, et **mod**)

2) Graphes de fonctions

2.1) Fonctions 2D. Pour tous les nombres x compris entre -2 et 4 avec un pas de 0.1, calculer les fonctions :

$$y = sin(x^2) \quad et \quad y = cos(x^2)$$

Puis, avec la fonction **plot**, faire une représentation graphique des courbes de ces fonctions sur une même figure avec des couleurs différentes. Utiliser la fonction **legend** pour identifier la fonction et sa couleur.
La fonction **legend**, qui prend en paramètres des chaines de caractère permet d'associer un texte à chaque tracé dans l'ordre du passage de paramètre, ce qui constitue une légende.

2.2) Fonctions 3D. Sur des figures différentes cette fois, tracer les graphes des fonctions :

$$z = x^2 + y^2$$
$$z = x\ exp(-x^2 - y^2)$$
$$z = sin(x^2 + y^2) / (x^2 + y^2)$$

Pour x et y variant de -3 à 3 par pas de 0.1

Pour cela, vous devrez, à partir des vecteurs x et y, construire les matrices X et Y telles que :

X soit formée d'autant de lignes que y a de composantes, ces lignes étant identiques et égales à x'.
Y soit formée d'autant de colonnes que x a de composantes, ces colonnes étant identiques et égales à y

Il y a plusieurs façons de construire ces matrices :

- Soit en effectuant un produit intérieur avec un vecteur de 1 (fonction **ones**)
- Soit en utilisant la fonction **repmat**,
- Soit en utilisant la fonction **meshgrid** qui permet de créer des matrices à remplissage discret de point de grille apportant ainsi une aide au tracé de surface 3D pour des fonctions de 2 variables. En fait, étant donné 2 vecteurs x et y, **meshgrid** permet de créer 2 matrices X et Y telles que tout les couples $(x(i), x(j))$ soient décrit par l'association de ces 2 matrices. Cela revient à former les matrice X et Y tel que décrit ci-dessus.

Vous pourrez ensuite calculer vos fonctions $Z = f(X,Y)$,et en faire une représentation graphique 3D avec la fonction **surf**.

Remarque : votre code doit aussi marcher pour des vecteurs x et y différents

Ces figures devront être agrémentées de label pour les axes, d'une colorbar et d'un titre indiquant la fonction représentée. On pourra également utiliser **shading interp** pour lisser les couleurs.

3) Systèmes d'équations linéaires

Résoudre le système :

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - x_3 &= 9 \\ 5x_1 - 4x_2 + x_3 &= 3 \\ -3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Que l'on peut exprimer matricellement ainsi :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}}_{B}$$

a) Par la méthode de Cramer

Rappel de la méthode : Si A est carrée et $det(A) \neq 0$ (A inversible) alors $x_k = det(A_k)/det(A)$ où A_k est formée par la matrice A dans laquelle on a remplacé la $k^{ième}$ colonne par B :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 3 & -4 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & -1 \\ 5 & 3 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 5 & -4 & 3 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

Cela revient à calculer $$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{det(A)} \cdot \begin{pmatrix} det(A_1) \\ det(A_2) \\ det(A_3) \end{pmatrix}$$

On commencera par créer la matrice A, puis on déterminera les 3 autres matrices à partir de A. déterminer x comme indiqué ci-dessus, en utilisant la fonction **det**.

b) Par inversion de matrice : $A\,x = B \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = A^{-1}B$, en utilisant la fonction **inv**.

4) Polynômes

4.1) Coefficients et racines

Dans Matlab les polynômes ($a_n x^n$, $a_{n-1}x^{n-1}$,.., $a_1 x^1$, a_0) sont définis par le vecteur des coefficients (a_n, a_{n-1},.., a_1, a_0).
La fonction **polyval** calcule les valeurs *y* d'un polynôme. Elle prend en paramètre les coefficients du polynôme et un vecteur **x** qui contient les valeurs ou l'on veut le calculer.
La fonction **root** calcule les racines d'un polynôme à partir de ses coefficients, inversement, la fonction **poly** permet de trouver les coefficients d'un polynôme à partir des racines (à un facteur près).

Pour les polynômes suivants :

$$y_1 = 4x^2 + x - 9$$
$$y_2 = x^3 - 5x + 2$$
$$y_3 = x^4 - 5x^2 + 1x + 4$$

- Indiquez les vecteurs formés par leurs coefficients.
- Tracez leurs graphes (sur une même figure ou pas) pour un vecteur x variant de -2.5 à 2.5 par pas de 0.1. Fonction à utiliser : **plot** avec en paramètre le vecteur x, et le vecteur y rendu par la fonction **polyval** (utilisez des couleurs différentes pour chaque courbe).
- Donnez leurs racines et vérifiez en la cohérence :
  - par rapport aux tracés des courbes.
  - avec la fonction **poly**, qui appliquée sur les racines trouvées, doit vous redonner les coefficients des polynômes. (C'est n'est vrai pour y_1 qu'à un facteur près)

N'hésitez pas à intégrer des titres, des labels, des légendes aux figures présentées.

4.2) Multiplication et Division

La fonction **conv,** qui prend en paramètre les coefficients de 2 polynômes (p1 et p2) est une fonction de convolution qui permet de les multiplier (p3=**conv**(p1,p2) => p3=p1*p2).

On vous demande de réaliser une figure sur laquelle on présentera les courbes des polynômes y_1 et y_2 de la question 4.1 précédente ainsi que celle résultant de leur multiplication ($y_4=y_1*y_2$) dont on indiquera les coefficients. On donnera les racines de ce nouveau polynôme (y_4).

Pour réaliser la division de polynômes on dispose de la fonction **déconv** (qui fait l'inverse de **conv**). Elle retourne le quotient (Q) et le reste (R) de la division de deux polynômes : ([Q,R]=**deconv**(p2,p1)). En utilisant cette fonction, on s'assurera de retrouver les coefficients de y_1 en divisant y_4 par y_2 et ceux de y_2 en divisant y_4 par y_1. (Remarque : Avec **Octave**, il peut être nécessaire de transposer p2).

4.3) Dérivée et Primitive

Etant donné un polynôme : $a_n x^n,\ a_{n-1}x^{n-1},..,\ a_1 x^1,\ a_0,$

Pour le dériver, on doit multiplier les coefficients (a_i) par i puis faire -1 sur l'exposant i (attention à la constante)
Pour trouver sa primitive, on fait l'opération inverse : $+1$ sur l'exposant et division du coefficient par l'exposant obtenu.

Soit le polynôme : $p(x) = x^3 + 2x^2 - 10x - 10.$

On vous demande d'en donner sa dérivée et sa primitive. Cela peut se faire avec la fonction **length**, en construisant les vecteurs adéquats et en réalisant les opérations nécessaires. Vous contrôlerez la validité de votre programmation en dérivant la primitive, ce qui devra vous redonner la fonction à la constante près.

On présentera, sur une même figure et avec des couleurs différentes, la courbe de la fonction, de sa dérivée et de sa primitive pour des valeurs de x allant de -4.5 à 3.5 par pas de 0.1. On donnera les racines de la fonction et de la dérivée. Que doit-on on vérifier visuellement.